一. 复数与复变函数

1. $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}=x+iy$

$\mathrm{Arg}\, z=\arg z+2k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2\cdots$　　$\arg z$：幅角主值 $\in(-\pi,\pi]$.

$$\arg z=\begin{cases}\mathrm{arctg}\, y/x & z\text{为一、四象限}\\ \mathrm{arctg}\, y/x+\pi & z\text{为二象限}\\ \mathrm{arctg}\, y/x-\pi & z\text{在三象限}\\ \pm\frac{\pi}{2} & z\text{在虚轴上}\\ \pi & z\text{在负实轴上}\end{cases}\Longrightarrow \text{幅角的多值性.}$$

2. $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$

$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}\, z_1+\mathrm{Arg}\, z_2$
$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}\, z_1-\mathrm{Arg}\, z_2$
等式两边构成的集合相等.(都包含无穷多幅角).

几何意义：z乘某复数相当于将此复数旋转 $\arg z$ 且模变成 $|z|$ 倍 (乘除)

3. 黎曼球面 $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$

4. 复变函数：$(x,y)\in\Omega\mapsto(u,v)$：$(u,v)=f(x,y)$.

$$\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y).\end{cases}$$

$\omega=f(z)$.

设$f(z)$定义在Ω上，z_0是Ω的极限点，若$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使
$z\in V^*(z_0;\delta)\cap\Omega$时，$f(z)\in V(L;\varepsilon)$，则$f(z)$有极限$L$.

设$a\in\Omega$，若$\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ 使 $f(V(a;\delta)\cap E)\subset V(f(a);\varepsilon)$
则$f(z)$在$z=a$连续. 若$f(z)$在Ω每点连续，则$f(z)$在Ω连续.

极限、连续 $\Leftrightarrow$ 两个二元实变函数的极限、连续 (求极限)(证伪、从不同方向逼近)

5. 直线：$\bar{B}z+B\bar{z}+C=0$

圆周：$|z-z_0|=R\Leftrightarrow Az\bar{z}+\bar{B}z+B\bar{z}+C=0$.

若$\Omega\in\mathbb{C}$为紧集，$f(z)$在Ω上连续，则：

$$\begin{cases}f(z)\text{在}\Omega\text{上有界，}f\text{把紧集映为紧集.}\\ |f(z)|\in[|f(z_1)|,|f(z_2)|]\quad\exists z_1,z_2\in\Omega,\ \forall z\in\Omega\\ f(z)\text{在}\Omega\text{上一致连续}\Leftrightarrow u\text{、}v\text{一致连续.}\end{cases}$$

二、解析函数

1. 导数：$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ 存在，f 可导 ⟺ 可微 ⟺ u、v 可微且

满足 C-R 方程（在一点上）$|_{z=z_0}$ ⇐ 可导函数的和差积商及复合。

1) u、v 是两个实二元函数，其可微性的验证可通过

{ 定义：$\left.\frac{\Delta u-du}{\rho(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})}\right|_{z\to z_0}=0$.

可微的一个充分条件：u、v 的四个偏导函数在 z_0 处连续

2). 可导 ⟺ u、v 可微且满足 C-R 方程 的证明：

必要性：设 $f(z)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 可导，则

$$\left|\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-f'(z_0)\right|<\varepsilon \quad \forall\varepsilon>0.$$

令 $\rho(\Delta z)=\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-f'(z_0)$，则 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0$.

$\therefore f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=f'(z_0)\Delta z+\rho(\Delta z)\Delta z$.

令 $f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=\Delta u+i\Delta v$，$f'(z_0)=a+ib$，$\rho(\Delta z)=\rho_1+i\rho_2$

$\therefore \Delta u+i\Delta v=(a+ib)(\Delta x+i\Delta y)+(\rho_1+i\rho_2)(\Delta x+i\Delta y)$

$=(a\Delta x-b\Delta y+\rho_1\Delta x-\rho_2\Delta y)+i(b\Delta x+a\Delta y+\rho_2\Delta x+\rho_1\Delta y)$

$\therefore \Delta u=a\Delta x-b\Delta y+\rho_1\Delta x-\rho_2\Delta y$

$\Delta v=b\Delta x+a\Delta y+\rho_2\Delta x+\rho_1\Delta y$

$\because \lim\limits_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0 \quad \therefore \lim\limits_{\Delta z\to 0}\rho_1=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\rho_2=0$.

$\therefore$ u、v 在 $z_0=x_0+iy_0$ 可微，且 $a=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$b=-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$.

充分性：$\because f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=[u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)]+i[v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)]$

$=\Delta u+i\Delta v$.

$\because$ u、v 在 z_0 可微 $\therefore \Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$

$\Delta v=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_3\Delta x+\varepsilon_4\Delta y$.

$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\varepsilon_1=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\varepsilon_2=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\varepsilon_3=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\varepsilon_4=0$.

$\therefore f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y+(\varepsilon_1+i\varepsilon_3)\Delta x+(\varepsilon_2+i\varepsilon_4)\Delta y$

又由 C-R 方程 $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}$.

$\therefore f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x+i\Delta y)+(\varepsilon_1+i\varepsilon_3)\Delta x+(\varepsilon_2+i\varepsilon_4)\Delta y$.

即 $\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+(\varepsilon_1+i\varepsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z}+(\varepsilon_2+i\varepsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z}$.

$\because \left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right|\le 1$，$\left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right|\le 1$ 且 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\varepsilon_k=0$. $\therefore$ 当Δz趋于零时，上式右端后两项趋于0.

$\therefore f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$ 即$f(z)$在z_0可导.

同时 $f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$.

2. 点解析：$f(z)$在z_0及z_0的某邻域内处处可导 $\Rightarrow$ $f(z)$在z_0可导.

解析：$f(z)$在区域D内处处解析 $\Longleftrightarrow$ $f(z)$在D可导.

不解析：z_0的任意邻域存在$f(z)$的不可导点：奇点（$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$极限不存在）.

☆ 推论：若u、v的各偏导数在区域D内存在且连续，并满足C-R方程.

$\Updownarrow$

$f(z)$在D内解析（充要条件）（因为在区域内解析的条件为导数存在 Cauchy. 故u、v的各阶偏导存在，故u、v的各一阶偏导连续；点解析则无此推论）

在一点处，可导等价于可微，可微必连续，反之不成立（eg. $f(z)=\bar{z}$）；连续必有极限，反之不成立.（eg：$f(z)=\frac{z\,\mathrm{Re}(z)}{|z|}\big|_{z=0}$）.

解析则必可导，反之不成立（eg：$f(z)=z\cdot\mathrm{Re}(z)$）.

另外，u或v的偏导在某点不连续不意味在此点u、v不可微，此时要用可微定义检测其可微性：$\frac{\Delta u-du_0(\text{全微分})}{\rho}\to 0$.

（eg：$f(z)=\begin{cases}|z|^2\sin\frac{1}{|z|} & z\ne 0\\ 0\end{cases}$）

3. 指数函数：$e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$. 处处解析、$2k\pi i$周期、$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$.

对数函数：$\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i\,\mathrm{Arg}\,z$ 主值支 $\ln z=\ln|z|+i\arg z$.

其中 $\mathrm{Arg}\,z=\arg z+2k\pi$. $k=0,\pm1,\pm2\cdots$

$\ln z$、$\mathrm{Ln}\,z$在除原点和负实轴的z平面内处处解析 且 $(\mathrm{Ln}\,z)'=(\ln z)'=\frac{1}{z}$.

$n\,\mathrm{Ln}\,z\ne\mathrm{Ln}\,z^n$，$\mathrm{Ln}\sqrt[n]{z}\ne\frac{1}{n}\mathrm{Ln}\,z$：实部相等，虚部取值集合不同.

乘幂：$a\in\mathbb{C}$，$a^b=e^{b\,\mathrm{Ln}\,a}=e^{b(\ln|a|+i\,\mathrm{Arg}\,a)}=e^{b[\ln|a|+i(\arg a+2k\pi)]}$.

- b为整数时，$e^{2kb\pi i}=1$，单值.
- b为有理数$\frac{p}{q}$时，$k=0,1,2\cdots q-1$，有q个值（p、q互质）.
- b为无理数，无穷多值.
- b为纯虚数ih时，$e^{2k\pi i\cdot ih}=e^{-2k\pi h}$，辐角不变而模变.
- b为复数$g+ih$时，$e^{2k\pi i(g+ih)}=e^{-2k\pi h}\cdot e^{2k\pi gi}$，辐角变且模变.

幂函数 $z^b=e^{b\ln z}$，在除原点与负实轴的 z 平面处处解析 $(z^b)'=bz^{b-1}$.

如前：b = 整数，单值　　　　非孤立奇点.

b = 有理数，有限多值

b = 其它，无穷值.

三角函数 $\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$　$\cos z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}$　处处解析 $(\sin z)'=\cos z$，$(\cos z)'=-\sin z$

$\tan z=\sin z/\cos z=-i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}$，$z=\frac{\pi}{2}+k\pi$ 是一级极点（$\cos z$ 的一级零点）.

$|\sin z|$、$|\cos z|$ 均无界.

双曲函数. $\operatorname{sh}z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$　$\operatorname{ch}z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$

$\begin{cases}\sin iy=i\operatorname{sh}y,\ \operatorname{sh}iy=i\sin y.\\ \cos iy=\operatorname{ch}y,\ \operatorname{ch}iy=\cos y.\end{cases}$

4. C-R 方程极坐标形式：　$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$、$\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$.

将 $\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2}\\ \theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\end{cases}$　又 $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\end{cases}$

得. $\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\cos\theta=\left(\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\sin\theta.$

$\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\sin\theta=-\left(\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\cos\theta.$

得 $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$　同理 $\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$.

三. 复变函数的积分.

1. Riemann 积分 ⟺ 第二类曲线积分.（方向性、线性、路径可加性）

$\left|\int_c f(z)dz\right|\le\int_c|f(z)|ds<ML.$

$\begin{cases}\int f(z)dz=\int_c udx-vdy+i\int_c vdx+udy.\\ \int_c f(z)dz=\int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt\end{cases}$

2. 解析函数的积分.

柯西-古萨：$D\subset\mathbb{C}$ 单连通区域，$f(z)$ 在 D 内解析，Ω 内任一可求长简单闭曲线，则 $\oint_c f(z)dz=0$.

推广：区域 D 是可求长简单闭曲线 C 的内部，$f(z)$ 在 D 内解析 $\bar{D}$ 上连续，则 $\oint_c f(z)dz=0$.

复合闭路定理：$\oint_C f(z)dz=\sum_k \oint_{C_k} f(z)dz$　D：多连通域

闭路变形原理：变形时不经过奇点，则 $\oint_C f(z)dz$ 不变.

Cauchy 积分公式：$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$. $f(z)$ 在 D 内解析，$\bar{D}$ 上连续.

$\Downarrow$

高阶导数公式：$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$. $\Rightarrow$ 任意阶导数.

$\Downarrow$

Cauchy 不等式：$|f^{(n)}(a)|\le \frac{n!M}{R^n}\ (n=1,2,\cdots)$　$f(z)$ 在 $|z-a|<R$ 解析、有界 M.

$\Downarrow$

Liouville 定理：$|f'(a)|\le \frac{M}{R}$，$R\to\infty$ 时 $f(z)=const$. $f(z)$ 为整函数.

3. 原函数：$f(z)$ 在 D 内连续，若 ∃ D 内函数 $F(z)$ 使 $F'(z)=f(z)$ 则 $F(z)$ 为 $f(z)$ 的一个原函数. ~~$F(z)=\int_{z_0}^{z}$~~

定理：D 为单连通区域，$f(z)$ 在 D 内解析，则 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$.

证明：1）$F(z)$ 存在：

由于 $f(z)$ 在 D 内解析，故积分与连接 z_0、z 的路径无关.

故积分确定了 D 内单值函数 $F(z)$

2）$F(z)$ 可导：

由于 $f(z)$ 在 z_1 处连续，∴ $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$，当 $|z-z_1|<\delta$ 时.

$|f(z)-f(z_1)|<\varepsilon$, $\left|\frac{F(z)-F(z_1)}{z-z_1}-f(z_1)\right|=$

$\left|\frac{1}{z-z_1}\int_{z_1}^{z}[f(\zeta)-f(z_1)]d\zeta\right|\le \frac{1}{|z-z_1|}\int_{z_1}^{z}|f(\zeta)-f(z_1)||d\zeta|$

$<\frac{1}{\delta_0}\varepsilon\cdot\delta_0=\varepsilon$. ∴ 可导，$F'(z)=f(z)$

$\Rightarrow$ 任意次求原函数：单值.

Morera 定理：$f(z)$ 在 D 内连续，C 为 D 内任一可求长简单闭曲线，C 围区域属于 D，若 $\oint_C f(z)dz=0$ 则 $f(z)$ 在 D 内解析.

证明：由条件，$f(z)$ 沿 $B(z_0,\delta)$ 内任一可求长简单闭曲线积分为 0（$\forall z_0\in D$）

∴ $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ 在 $B(z_0,\delta)$ 内单值.

∴ $F'(z)=f(z)$.

~~又∵解析~~ ∵ z 的任意性 ∴ $F(z)$ 在 D 内可导. ∴ $F(z)$ 在 D 内解析

∴ $F(z)$ 有任意阶解析的导函数.

∴ $f(z)$ 解析.

调和函数：u在D内有二阶连续偏导数且$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

若u、v在D内调和且满足C-R方程$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，

则v是u的共轭调和函数。

故解析函数中v是u的共轭调和函数，u是$-v$的共轭调和函数

5. 已知解析函数（单连通域内）实部（虚部）求$f(z)$：

偏积分法：已知u，通过$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}$得$v=\int\frac{\partial u}{\partial x}dy+c(x)$。又由$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$得

$\frac{\partial}{\partial x}\int\left(\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+c'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}$。得$c(x)$的解得$v$。

线积分法：$\because \mathrm{rot}\left(-\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

$\therefore v=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy$ 与路径无关。

$\therefore$ 选简单路径可求得v。

不定积分法：$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$ $\therefore f'(z)$仍是解析函数

$\therefore$ 可得其表示式$g(z)$

$\therefore f(z)=\int g(z)dz+C$。$C$为实常数。

6. 平均值公式：$f(z)$在$|z-a|<R$内解析，则$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+re^{i\theta})d\theta$

最大模原理：$f(z)$在D内解析且不为常数，则$|f(z)|$最大值只在边城边界取得

泊松积分：$\nabla^2u=0\Rightarrow u(x,y)=u(r\cos\varphi,r\sin\varphi)$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)u(R\cos\theta,R\sin\theta)}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta$$

证明：设$f(z)=u+iv$在D内解析，C为D内正向圆周$|z|=R$。

设z为C内一点，令$\tilde{z}=R^2/\bar{z}$，则$\tilde{z}=\frac{z_0\cdot\bar{z}_0}{\bar{z}}=\left|\frac{z_0}{\bar{z}}\right|z_0$

$\because|\tilde{z}|>|z|$ $\therefore\tilde{z}$在C外 $\therefore\frac{f(\zeta)}{\zeta-\tilde{z}}$在$C$内解析。

$$\therefore\oint\frac{f(\zeta)}{\zeta-\tilde{z}}d\zeta=\oint_C\frac{\bar{z}f(\zeta)}{\zeta\bar{z}-R^2}d\zeta=0$$

$$\therefore f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\left(\frac{1}{\zeta-z}+\frac{\bar{z}}{R^2-\zeta\bar{z}}\right)f(\zeta)d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{(R^2-z\bar{z})f(\zeta)}{(\zeta-z)(R^2-\zeta\bar{z})}d\zeta$$

$\because C:|z|=R$ $\therefore$ 可令$\zeta=Re^{i\theta}$，$z=re^{i\varphi}$

$$\therefore f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{(R^2-z\bar{z})f(\zeta)\,d\zeta/\zeta}{(\zeta-z)(\bar{\zeta}-\bar{z})}=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{(R^2-r^2)f(\zeta)\,i\,d\theta}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)f(Re^{i\theta})}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta$$ 取实部即得。

四、级数

1. 复数列收敛 $\Leftrightarrow$ $\{\alpha_n\}$收敛 $\{\beta_n\}$收敛 $\Leftrightarrow$ Cauchy收敛准则 $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

复数项级数收敛 $\overset{①}{\Leftrightarrow}$ $\sum \alpha_n$、$\sum \beta_n$ 收敛 $\overset{③}{\Leftrightarrow}$ Cauchy收敛准则 $|z_{n+1}+z_{n+2}+\cdots+z_{n+p}| < \varepsilon$.

必要条件：$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. 先验证必要条件，再选用①②③.

$\sum |c_n|$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow$ $\sum|\alpha_n|$ $\sum|\beta_n|$ 绝对收敛 $\overset{②}{\Rightarrow}$ $\sum c_n$ 收敛.

$$\begin{cases} |\alpha_n| \le \sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}, \quad |\beta_n| \le \sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}. \\ \sum \sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2} \le \sum|\alpha_n| + \sum|\beta_n|. \end{cases}$$

函数项级数收敛 $\Leftrightarrow$ $\sum\alpha_n(z)$、$\sum\beta_n(z)$ 一致收敛 $\Leftrightarrow$ Cauchy：$|f_{n+1}(z)+\cdots+f_{n+p}(z)| < \varepsilon$.

充分条件：Weierstrass 判别法.

2. 幂级数：收敛圆内的解析函数、逐项求导（端点可能变散）、逐项积分（端点可能变敛）

Abel第一定理. $\sum c_n z^n$ 在 z_0 收敛，则 $\forall |z| < |z_0|$，$\sum c_n z^n$ 绝对收敛.

$\sum c_n z^n$ 在 z_1 发散，则 $\forall |z| > |z_1|$，$\sum c_n z^n$ 发散.

收敛半径：$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$，若是缺项级数，直接用比值/根值

运算性质：$\sum\limits_0 (\alpha a_n + \beta b_n) z^n = \alpha \sum\limits_0 a_n z^n + \beta \sum\limits_0 b_n z^n$. $R = \min(R_1, R_2)$

$\left(\sum\limits_0 a_n z^n\right)\left(\sum b_n z^n\right) = \sum\limits_0 (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_0 b_n) z^n$.

Taylor：$f(z)$ 在 D 内解析，$z_0 \in D$，若 d 为 z_0 到 ∂D 最短距离，则在圆域 $|z - z_0| < d$ 内 $f(z) = \sum\limits_0^{\infty} c_n (z-z_0)^n$、$c_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$（用Cauchy积分证之）

- R 为 z_0 到最近奇点距离；在边界上都收敛也不一定解析！
- 展开的唯一性（逐项求导易证）

3. Laurent级数 $f(z) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$. $c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$.（级数证之）

$\left.\begin{array}{l} \text{解析部分：} |z - z_0| < R_2 \text{ 收敛.} \\ \text{主要部分：} |z - z_0| > R_1 \text{ 收敛.} \end{array}\right\}$ 求 R_1、R_2 时分开求.

唯一性：$\because f(\zeta) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n (\zeta - z_0)^n$. $\therefore \oint_C \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{p+1}} d\zeta = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n \oint_C (\zeta - z_0)^{n-p-1} d\zeta = 2\pi i c_p$

- 圆环域内解析
- 逐项积分、逐项求导.

五、留数.

1. 孤立奇点. 非孤立奇点. $f(z): z\to\infty \Rightarrow \frac{1}{z} \Rightarrow 0,\ f(\frac{1}{z})$

$\hookrightarrow$ 可去奇点 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在,有限. (z_0是$f(z)$的定义的点)

极点 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$.

本性奇点 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在,不为∞(任何一种方式).

也可用Laurent级数定义. 亦可用零点判断,关键是判断几级零点.

可去奇点a: $f(z)$在$V^*(a;\delta)$上有界. $|f(z)|\le M$.

极点a: $f(z)=\frac{g(z)}{(z-a)^m}$. $g(z)$在$V(a;\delta)$内解析,不为0.

∞可去奇点: $f(z)$在$V^*(\infty;R)$上有界. 正幂项系数为0.

∞极点: $f(z)=z^m g(z)$. $g(z)$在$V(\infty;R)$内解析不为0.

2. 留数 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz=C_{-1}$.

∞: $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)dz=C_{-1}$. (在$\infty$处展开)

可去奇点: 有限则$\mathrm{Res}=0$; ∞则Res不一定为0.

极点: 1) $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$ m可大于实际级数

2) $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ P,Q均在z_0解析, z_0为Q一级零点, 则$\mathrm{Res}=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$.

3) $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}[f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2},0]$.

本性奇点: Laurent展之.

$\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$

$\mathrm{Res}[f(z),\infty]+\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]=0$. z_k为有限孤立奇点.

3. 留数算积分.

$F(z)=\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$, $f(z)$在D解析. 则 $\mathrm{Res}[F(z),z_0]=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C F(z)dz$

$\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta \Rightarrow \oint_{|z|=1}\cdots\cdots$

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx \Rightarrow$ 上半平面内包住所有孤立奇点的围道积分, Q比P至少高二次.

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{iax}dx \Rightarrow$ 上半平面内包住所有孤立奇点的围道积分, Q比P至少高一次

其它定积分也转化为复平面上的围道积分求出各段的值 按留数定理算之.